

UN SEMPLICE MODO PER TRATTARE LE GRANDEZZE INFINITE ED INFINITESIME

Yaroslav D. Sergeyev¹

Sunto: In questo articolo viene presentata in modo informale e (l'autore spera) semplice una nuova metodologia computazionale che permette di lavorare in modo agevole con infiniti ed infinitesimi. Il nuovo approccio, tra altre cose, permette di calcolare facilmente il numero di elementi di certi insiemi infiniti, evitare le forme indeterminate e trattare in modo semplice le serie divergenti. Questa metodologia è stata usata dall'autore come un punto di partenza per lo sviluppo di un nuovo tipo di calcolatore – l'Infinity Computer – in grado di eseguire calcoli numerici e conservare in memoria non solo numeri finiti ma anche infiniti ed infinitesimi.

Abstract: A new computational methodology allowing one to work in a new way with infinities and infinitesimals is presented in this paper. The new approach, among other things, gives the possibility to calculate the number of elements of certain infinite sets, avoids indeterminate forms and various kinds of divergences. This methodology has been used by the author as a starting point in developing a new kind of computer – the Infinity Computer – able to execute computations and to store in its memory not only finite numbers but also infinite and infinitesimal ones.

Parole chiave: Numeri e numerali, infiniti ed infinitesimi, Infinity Computer, misurazione degli insiemi infiniti, serie divergenti, grossone.

Ringraziamenti. Il primo semplice prototipo del simulatore dell'Infinity Computer presentato in questo lavoro è stato sviluppato dall'autore insieme con il Prof. Luigi Brugnano dell'Università di Firenze, il Dott. Dmitri E. Kvasov dell'Università della Calabria ed il nostro laureando di allora, il Dott. Lorenzo Conegni. L'autore ringrazia i colleghi per la loro preziosa collaborazione. L'autore ringrazia inoltre il Prof. Alfredo Garro dell'Università della Calabria ed il Revisore assegnato dalla rivista per i loro raffinati commenti che hanno permesso di migliorare il testo.

¹ Professore Ordinario presso il Dipartimento di Informatica, Modellistica, Elettronica, e Sistemistica dell'Università della Calabria e Professore Ordinario a contratto presso l'Università statale Lobachevsky di Nizhni Novgorod, Russia.

1. Introduzione

Da molti secoli la matematica usa in modo massiccio i concetti di infinito e del suo ‘inverso’ – infinitesimo - in molte sue aree. Tuttavia, ancora non possiamo dire di averne pienamente compreso la natura. Nel corso dei secoli entrambi concetti hanno attratto l’attenzione di molti insigni filosofi, matematici, fisici e teologi che hanno cercato di svelare i misteri dell’infinito e degli infinitesimi, di introdurli nella pratica matematica e di definirli in maniera sempre più rigorosa (In Tabella 1 sono presentate alcune delle tappe di questa più che millenaria ricerca).

Come possiamo osservare dalla storia della matematica, le teorie relative agli infinitesimi ed agli infiniti hanno avuto percorsi di sviluppo non sempre correlati. I primi sono stati studiati ed usati da secoli; invece, il punto di vista moderno sull’infinito ha cominciato a formarsi solo 140 anni fa con i risultati fondamentali ottenuti da Georg Cantor che ha dimostrato che possono esistere infiniti diversi tra di loro ed alcuni infiniti possono essere “più grandi” di altri. Il suo pensiero, che alla fine dell’ottocento era rivoluzionario ed ora è diventato classico dando vita a moltissimi risultati utili e profondi, ci insegna che con le quantità infinite bisogna comportarsi in modo diverso rispetto a quanto siamo abituati a fare con le grandezze finite. La linea di pensiero indicataci da Cantor ci porta a molti risultati che sembrano contro intuitivi e paradossali per un “non matematico”.

Diamo un solo esempio legato al concetto di infinito ed ai problemi che ne derivano già notati da Galileo Galilei (anche se esistono diversi “paradossi” che hanno a che fare con l’infinito: Il Grand Hotel di Hilbert, La Lampada di Thompson, Il Paradosso di Banach-Tarski, etc.). L’esempio in questione riguarda l’osservazione che un insieme infinito sia grande come una sua parte dove Galilei considera la biiezione tra numeri interi positivi e i quadrati perfetti positivi. Chiaramente, una simile osservazione può essere fatta scrivendo i numeri naturali² sotto i numeri dispari in questo modo:

numeri dispari:	1,	3,	5,	7,	9,	11,	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
numeri naturali:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	...

Otteniamo quindi che i numeri dispari, nonostante siano una parte dei numeri naturali, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con tutti i numeri naturali facendoci vedere che un oggetto può essere grande come una sua parte propria. Questo risultato è molto difficile da digerire perché la nostra esperienza quotidiana ci insegna che nel mondo intorno a noi **l’intero è maggiore della parte**. Infatti, nella opera *Elementi* di Euclide questo è il principio numero 5 tra le nozioni comuni, cioè tra le evidenze intuitive che non richiedono alcuna dimostrazione.

Il modo tradizionale che viene usato per insegnare il concetto di infinito a scuola (e non solo a scuola) ci dice che “paradossi” come questo appena illustrato fanno parte della *natura* dell’infinito e perciò non vanno d’accordo con la nostra esperienza quotidiana. Di fronte all’infinito ci dobbiamo comportare in maniera diversa rispetto alla nostra pratica matematica alla quale siamo abituati quando lavoriamo con grandezze finite. Non è strano quindi, che l’insegnamento del concetto di infinito nei corsi di matematica è da sempre molto difficile e, per taluni, impenetrabile.

Sulle teorie relative al concetto di infinito ed infinitesimo è stato scritto moltissimo ed il lettore interessato facilmente troverà dei testi sia divulgativi che specializzati sull’argomento (come punto di partenza indichiamo solo due volumi [7,32]). Vista la vastità di testi eccellenti già esistenti evitiamo un’introduzione approfondita alle teorie tradizionali. In questo articolo cercheremo di capire come si potrebbe affrontare il problema dell’infinito da un nuovo punto di vista che permetterebbe di trattare l’infinito non solo in accordo con il principio numero 5 di Euclide ma

² Molto spesso nella letteratura moderna il termine “numero naturale” include anche lo zero. Tuttavia, poiché lo zero è stato inventato molto più tardi rispetto ai numeri interi positivi come 1, 2, 3, ecc. in questo testo noi seguiremo la tradizione storica non includendo lo zero nell’insieme dei numeri naturali $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

anche di lavorare con grandezze infinite ed infinitesime in modo più agevole. Per non spaventare il lettore precisiamo subito che il nuovo approccio non contraddice né Cantor né la tradizione. Viene soltanto cambiato il punto di vista sulle cose il quale, come l'autore spera, permetterà di lavorare con i suddetti concetti in modo più semplice ed intuitivo rispetto sia a quello tradizionale che all'analisi non-standard. Per illustrare la nuova visione dell'infinito e degli infinitesimi nel testo vengono presentati diversi esempi ed esercizi con le relative soluzioni.

Concludiamo questa breve introduzione notando che la nuova metodologia di calcolo che verrà presentata in seguito ha già trovato diverse applicazioni in matematica pura ed applicata, nonché in informatica. In particolare, notiamo che la non contraddittorietà della teoria ed i legami con la matematica tradizionale sono stati studiati da logici in [8-10,13]. Per gli approfondimenti, le persone interessate possano consultare i seguenti lavori tecnici [1,2,4-6,8-13,15-32,34,35] ed il sito internet [36] dove questi lavori sono disponibili insieme con alcuni recensioni, video, ecc.

Tabella 1. Alcuni protagonisti della storia degli infinitesimi ed infiniti in matematica

Zenone di Elea, 490 a.C. - 425 a.C. circa	propone alcuni paradossi tra cui quelli di Achille e La Tartaruga, della Dicotomia e della Freccia dedicati ai problemi che sorgono analizzando il discreto ed il continuo
Eudosso di Cnido, 408 a.C. - 355 a.C.	introduce il metodo di esaustione che sarà alla base del concetto di integrale sviluppato successivamente da Newton e Leibniz
Aristotele, 384 a.C. - 322 a.C.	elabora i concetti di infinito attuale e potenziale che sono alla base dei punti di vista sull'infinito dei filosofi moderni
Archimede, 287 a.C. - 212 a.C.	fu il primo ad usare infinitesimi in matematica applicata (nonostante non credesse alla loro esistenza)
Galileo Galilei, 1564 - 1642	considera la biezione tra numeri interi positivi e i quadrati perfetti positivi e scrive che i concetti 'minore' e 'maggiore' non possono essere applicati agli insiemi infiniti
Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598 - 1647	introduce il metodo degli indivisibili ("tutte le linee" di una figura piana e "tutti i piani" di una figura solida) per il calcolo di aree e volumi
Jonn Wallis, 1616 - 1703	nel 1655 introduce il simbolo ∞ modificando il simbolo ∞ usato nella numerazione romana per il numero 1000
Sir Isaac Newton, 1643 - 1727	introduce il calcolo infinitesimale
Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 - 1716	introduce il calcolo infinitesimale
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845 - 1918	introduce due tipi di numeri infiniti: i numeri ordinali per indicare la posizione di un elemento nelle successioni ed i numeri cardinali per misurare gli insiemi infiniti. Dimostra l'esistenza di più di un cardinale infinito
David Hilbert, 1862 - 1943	nella sua famosa lista dei problemi matematici per il XX secolo annunciata nel 1900 il problema numero uno è l'Ipotesi del Continuo: Non esiste nessun insieme la cui cardinalità è strettamente compresa fra quella dei numeri naturali e quella dei numeri reali
Tullio Levi Civita, 1873 - 1941	sviluppa i campi di Levi Civita che includono gli infinitesimi

Kurt Gödel, 1906 – 1978	nel 1943 fa il primo passo nella dimostrazione dell'indipendenza dell'Ipotesi del Continuo da altri assiomi della teoria degli insiemi
Paul Cohen, nato nel 1934	nel 1963 conclude la dimostrazione dell'indipendenza dell'Ipotesi del Continuo da altri assiomi della teoria degli insiemi
Abraham Robinson, 1918 – 1974	introduce l'analisi non-standard dando al lavoro con gli infinitesimi un alto rigore matematico

2. La metodologia di studio

Nell'Ottobre del 2004 su *Science* è stato pubblicato lo studio di Peter Gordon della Columbia University (si veda [3]) che descrive una tribù dell'Amazzonia – i Pirahã – che usano un sistema molto semplice per fare i conti: uno, due, molto. L'aritmetica che ne viene fuori è alquanto bizzarra:

$$1 + 1 = 2, \quad 1 + 2 = \text{molto}, \quad 2 + 2 = \text{molto},$$

$$\text{molto} + 1 = \text{molto}, \quad \text{molto} + 2 = \text{molto}, \quad \text{molto} + \text{molto} = \text{molto}.$$

I Pirahã non sono in grado di distinguere, per esempio, i numeri 4 e 5 perché ignorano la loro esistenza e nella loro lingua non esistono le parole per indicare questi numeri. Come conseguenza, non possono eseguire dei calcoli con numeri maggiori di 2, i quali, in un certo senso, per loro rappresentano l'infinito. Infatti, cambiando la parola 'molto' con il simbolo dell'infinito ∞ otteniamo, da tre uguaglianze finali dell'aritmetica dei Pirahã, le uguaglianze

$$\infty + 1 = \infty, \quad \infty + 2 = \infty, \quad \infty + \infty = \infty$$

che noi tutti abbiamo imparato a scuola. Da questo punto di vista, l'unica differenza tra noi ed i Pirahã sta nel fatto che il loro infinito inizia "molto prima" del nostro.

Un'altra tribù, i Mundurukù, descritta (si veda [14]) nello stesso numero di *Science* ha un sistema numerale³ più avanzato e ancora più sorprendente. Loro sono in grado di distinguere i numeri 1, 2, 3, 4, 5 e poi hanno due tipi di "molto": *molto ma non troppo* e *veramente molto*. Sorprendentemente, le operazioni con questi due tipi di *molto* sono simili alle operazioni con i numeri cardinali di Cantor dove *molto ma non troppo* gioca il ruolo di infinito numerabile e *veramente molto* il ruolo di infinito continuo.

Queste osservazioni ci fanno pensare che probabilmente **le nostre difficoltà a lavorare con l'infinito non sono legate alla natura dell'infinito ma all'utilizzo di un linguaggio matematico inadeguato per scrivere i numeri, in particolare, ai sistemi numerali poco precisi che usiamo per lavorare con i numeri infiniti.**

Per introdurre un nuovo linguaggio matematico ed un nuovo sistema numerale che ci permetterebbero di lavorare con l'infinito in un modo più semplice ed intuitivo, dobbiamo stabilire le regole del gioco che saranno più vicine alla vita reale e un po' più lontane dal modo tradizionale di affrontare il problema. Il nostro scopo, quindi, non sarà la descrizione di concetti avanzati e difficili della teoria degli insiemi; al contrario, cercheremo di costruire nuovi strumenti matematici per risolvere alcuni problemi applicativi. Comunque, mostreremo che i due modi di lavorare con

³ Si ricorda la distinzione tra i *numeri* e *numerali*. Un numero è un concetto, un'entità astratta che può essere rappresentato da diversi numerali dove un numerale è una stringa di simboli scritta con le regole fissate da un particolare sistema numerale. Per esempio il numero 8 qui è scritto con il numerale che appartiene al sistema posizionale decimale. Lo stesso numero espresso con i numerali del sistema numerale Romano viene rappresentato dal numerale VIII e nel sistema numerale posizionale binario con il numerale 100.

l'infinito (quello tradizionale ed il nuovo) non sono in contraddizione l'uno con l'altro. Cominceremo con l'introduzione di tre Postulati che preciseranno la nostra posizione filosofica verso l'infinito e la matematica, in generale. Per approfondire la trattazione si consiglia di consultare anche il libro "Arithmetic of Infinity"(si veda [15]) dedicato al nostro nuovo modo di lavorare con l'infinito. Il libro è scritto in modo divulgativo ed è, quindi, accessibile anche ai non esperti.

Per introdurre la nuova metodologia cominciamo con la seguente umile constatazione: accettiamo che non potremo mai dare una descrizione completa dei processi e degli insiemi infiniti a causa della limitatezza delle nostre capacità, dovuta al fatto che viviamo in un mondo finito e siamo quindi costretti a terminare le operazioni che cominciamo. In particolare, questo significa che possiamo scrivere solo un numero finito di simboli per esprimere i numeri. Quindi, formuliamo il primo postulato:

1. Da una parte accettiamo che possiamo eseguire solo un numero finito di operazioni e dall'altra accettiamo l'esistenza di oggetti infiniti ed infinitesimi.

Possiamo notare immediatamente che questo postulato non esprime la visione tradizionale del mondo matematico perché esso sottolinea la finitezza delle nostre possibilità di eseguire qualunque tipo di operazione. Invece, tradizionalmente si pensa che gli esseri umani sono sempre in grado di eseguire un numero infinito di operazioni. Basti pensare all'esempio citato in precedenza dove viene costruita la corrispondenza uno-ad-uno tra due insiemi infiniti oppure semplicemente all'insieme dei numeri naturali che viene informalmente introdotto come 1,2,3 e così via dando per scontato che possiamo eseguire questo "e così via" fino all'infinito. Dall'altra parte, il postulato chiaramente non appartiene all'*ultrafinitismo*, una corrente della matematica che rifiuta l'esistenza di oggetti infiniti. Il postulato riflette la volontà dei matematici di studiare gli oggetti infiniti (che risultano essere molto utili in diverse occasioni) ma ci ricorda che per farlo dobbiamo essere in grado di vedere i risultati delle nostre operazioni, cioè dobbiamo finirle in un modo o in un altro dopo aver eseguito un numero finito di esse.

Per formulare il secondo postulato ricordiamo che desideriamo risolvere dei problemi applicativi provenienti, quindi, dal mondo fisico. I fisici quando studiano la natura usano degli strumenti per descrivere l'oggetto dello studio e questi strumenti vincolano la loro conoscenza dell'oggetto. Quando un fisico osserva alla lente di un microscopio due puntini neri non può dire: l'oggetto dell'osservazione è costituito da due puntini neri. Piuttosto, egli è costretto a dire: la lente usata nel microscopio mi permette di vedere due puntini neri e non posso dire null'altro sulla natura dell'oggetto se non cambio lo strumento – la lente o tutto il microscopio – con uno più preciso. Supponiamo che dopo aver cambiato la lente il fisico sia in grado di vedere 12 puntini più piccoli al posto del primo puntino nero e 23 al posto del secondo. Di nuovo, il nostro fisico non dirà che questi puntini **costituiscono** l'oggetto dello studio ma parlerà di quello che egli in grado di osservare con questa nuova lente. Lo strumento di studio limita sempre le nostre possibilità di osservazione.

Ora possiamo chiederci: Quale delle due risposte – 2 puntini oppure 12 e 23 puntini – è corretta? Chiaramente, entrambe le risposte sono corrette, ma con precisioni diverse definite dagli strumenti usati per le osservazioni. Sottolineiamo che le due risposte non sono in contrapposizione una con l'altra, entrambe descrivono la realtà (o quello – qualsiasi cosa sia - che c'è dietro ai nostri strumenti di osservazione) correttamente con la precisione degli strumenti usati per le osservazioni.

Ritorniamo ora alla matematica. Tra i suoi oggetti di studio troviamo i fenomeni naturali, i numeri ed i sistemi ed oggetti matematici creati con i numeri. Tra gli strumenti invece evidenziamo i sistemi numerali (per esempio, il sistema Romano, quello posizionale oppure quello dei Pirahã) che ci permettono di scrivere i numeri ed eseguire le operazioni aritmetiche con essi. Come accade in fisica, quando vengono proposti i nuovi strumenti matematici essi saranno più precisi di quelli esistenti ma rimarranno sempre limitati (in particolare, per le ragioni espresse dal postulato 1). La

visione fisica della matematica che sottolinea la distinzione tra gli oggetti di studio e gli strumenti usati per questo studio viene descritta dal postulato numero due.

2. Seguendo l'approccio naturalistico dei fisici, non ci avventureremo nel dire che cosa sono gli oggetti matematici ma costruiremo degli strumenti (nel nostro caso – un nuovo sistema numerale) che ci permetteranno di migliorare le nostre capacità di osservare e descrivere gli oggetti matematici.

Questo postulato è molto importante per il nostro studio perché introduce la triade – ricercatore, strumento di osservazione e oggetto di osservazione – in matematica, sottolineando la distinzione che i fisici hanno introdotto molto tempo fa, all'inizio del XX secolo.

In particolare, i sistemi numerali sono tra gli strumenti usati dai matematici per studiare oggetti matematici e ci permettono di osservare numeri, insiemi di numeri, ecc. Poiché nuovi sistemi numerali vengono introdotti molto raramente, le persone sono portate a pensare di essere in grado di scrivere senza difficoltà qualsiasi numero. Purtroppo non è così perché noi siamo in grado di scrivere solo quei numeri che sono esprimibili con i sistemi numerali che conosciamo e con un numero finito di simboli (si veda il postulato 1). Come in fisica, i nostri strumenti – i sistemi numerali – ci limitano quando vogliamo osservare oggetti matematici (numeri, insiemi di numeri, ecc.) fissando anche l'accuratezza di osservazione.

Quindi, il postulato non solo porta la nostra attenzione agli strumenti usati dai matematici ma introduce anche il concetto di accuratezza dei risultati matematici in dipendenza dagli strumenti (per esempio, i sistemi numerali e, più in generale, i linguaggi matematici) usati. Il concetto di accuratezza sottolinea anche che qualsiasi risultato matematico non è assoluto, la sua accuratezza è limitata dalle capacità espressive del linguaggio usato per enunciare (scrivere) questo risultato. Infatti, è ben noto che tutti i risultati matematici (importanti) vengono continuamente riscritti per aumentarne il livello di precisione rispetto alle norme usate in ogni periodo storico.

Diamo qualche esempio per illustrare il postulato concentrandoci sui sistemi numerali visti come strumenti di studio matematico. In primis, basti pensare ai citati Pirahã che con il loro strumento possano osservare con un'accuratezza non migliorabile solo i numeri uno e due. Notiamo anche che la loro risposta *molto* non è sbagliata, è corretta, ma la sua precisione è bassa. Infatti, anche noi – persone che conosciamo più numerali dei Pirahã - molto spesso nelle situazioni dove l'alta precisione della risposta non è richiesta usiamo *molto*. Per esempio, alla domanda “Quanti alberi ci sono in questo parco?” la risposta *molti* è corretta e spesso soddisfacente.

Le persone dell'altra tribù, Mundurukù, attraverso il loro sistema numerale possano vedere più numeri ma comunque il loro campo visivo è molto povero e l'accuratezza di osservazione è molto bassa. Chiaramente non sono in grado di scrivere i numeri grandi con il loro sistema numerale. Come dicevamo, la presenza di due tipi di *molto* e la somiglianza del loro uso con l'uso dei cardinali di Cantor è sorprendente.

Un altro sistema numerale di cui possiamo vedere chiaramente i limiti è il sistema Romano. Questo sistema non permette di osservare lo zero ed i numeri negativi. Per esempio, l'operazione $V-X$ in questo sistema è una forma indeterminata. Come conseguenza, i Romani non furono in grado di formulare nessun teorema che avesse la necessità dello zero o dei numeri negativi. Non furono in grado neanche di scrivere i numeri molto grandi. Archimede, che lavorava con il sistema numerale Ionico che usava i caratteri dell'alfabeto Greco capiva benissimo tale tipo di limitazioni. Infatti, ne suo famoso testo *Arenario* egli ha introdotto un sistema numerale apposito per esprimere i numeri molto grandi.

Anche il moderno sistema posizionale ha i suoi limiti sia per quanto riguarda la scrittura dei numeri grandi che per l'accuratezza. Infatti, esso non è in grado di esprimere con un numero finito di simboli (la finitezza è indispensabile per eseguire i calcoli in pratica) alcun numero irrazionale.

Infatti, per esprimerli vengono usati simboli speciali come π oppure $\sqrt{2}$ che non fanno parte del sistema posizionale. Anche per quanto riguarda la grandezza ci sono dei limiti, per esempio, non è possibile scrivere nessun numero che ha 10^{100} cifre. Infatti, scrivendo una cifra in un nanosecondo ci vorrebbero 10^{91} secondi. Visto che in un anno abbiamo $31\,556\,926 \approx 3,1 \cdot 10^7$ secondi per eseguire questa scrittura ci vorrebbero $3,2 \cdot 10^{83}$ anni circa. E' un tempo abbastanza lungo visto che le osservazioni attuali suggeriscono che l'età dell'Universo sia di circa 13,82 miliardi di anni, cioè "solamente" di $1,382 \cdot 10^{10}$ anni.

Le limitazioni che i sistemi numerali pongono rispetto alla scrittura dei numeri giocano un ruolo importante anche per quanto riguarda i risultati teorici. Questo aspetto, che viene spesso sottovalutato dai matematici puri, viene sottolineato dalla nuova metodologia. Per illustrare come il significato di un'espressione matematica cambia in dipendenza dai sistemi numerali usati consideriamo la frase "Studiamo tutti i numeri $x \in [1,2]$ ". Per i Pirahã e i Mundurukù *tutti i numeri* sono solamente 1 e 2. Per le persone che non conoscono i numeri irrazionali (o non accettano la loro esistenza) ma conoscono le frazioni (come, per esempio, Pitagora il quale, si dice, rifiutava i risultati di Ippaso di Metaponto sull'irrazionalità di $\sqrt{2}$) *tutti i numeri* sono i numeri che possono essere scritti nella forma $\frac{p}{q}$ dove a loro volta p e q sono espressi da un sistema numerale fissato. Per esempio, il sistema numerale dei Pirahã arricchito con la possibilità di scrivere i numerali nella forma $j + \frac{p}{q}$, $j, p, q \in \{1,2\}$, ci permette di rispondere che *tutti i numeri* nell'intervallo $[1,2]$ sono i numeri $1, 1 + \frac{1}{2}$ e 2 . Per le persone che conoscono il sistema posizionale *tutti i numeri* sono quelli che possono essere scritti in questo sistema. Notiamo anche che il sistema dei cardinali di Cantor non distingue tra la quantità dei numerali scritti nel sistema binario oppure nel sistema decimale dando in entrambi i casi la stessa risposta – la quantità infinita della potenza del continuo (ritorneremo su questo discorso più tardi). Come abbiamo visto con questo semplice esempio, l'oggetto dello studio cambia in dipendenza dallo strumento usato che in questo caso è uno specifico sistema numerale.

Un'altra conseguenza di rilievo del postulato 2 risiede nel fatto che esso cambia la nostra visione dei sistemi assiomatici. Il postulato parla degli strumenti e del fatto che loro limitano le nostre possibilità di descrivere oggetti matematici. Rispetto ai sistemi assiomatici questo significa che essi non *definiscono* gli oggetti ma li *descrivono* con l'accuratezza del linguaggio matematico usato. Il postulato sottolinea che non è possibile costruire nessun sistema assiomatico assoluto, definitivo - c'è sempre la dipendenza dallo strumento, cioè dal linguaggio usato (compreso il sistema numerale scelto per far parte del linguaggio), che limita le nostre capacità espressive. Il postulato, in un certo senso, riporta alla matematica la metodologia che i fisici hanno introdotto già nel XX secolo con lo sviluppo della relatività, della meccanica quantistica e del complicato rapporto tra gli oggetti di studio e gli strumenti usati per esso.

Ritorniamo ora ai nostri postulati metodologici. Il prossimo, e ultimo, postulato deriva, come dicevamo, dall'Antica Grecia dove è stato formulato il principio 'La parte è minore dell'intero' che descrive una regola fondamentale del mondo intorno a noi. Questa regola viene a mancare in molti sistemi tradizionali quando essi vengono usati per maneggiare gli insiemi infiniti (i nostri amici Pirahã, per esempio, ci direbbero che *molto* - $1 = molto$). Siccome abbiamo già visto che i risultati del tipo $\infty+1 = \infty$, non riflettono la natura dell'infinito ma sono semplicemente le conseguenze della povertà dei sistemi numerali, la nostra posizione verso questo principio è più coerente e viene espressa dal postulato numero tre:

3. Seguendo i pensatori dell'Antica Grecia, il principio 'La parte è minore dell'intero' viene applicato a qualunque grandezza (finita, infinita o infinitesima) e a ogni insieme o processo (finito o infinito).

Il postulato non è, quindi, d'accordo con quel che si deve accettare accogliendo la definizione di infinito di Cantor, cioè, la parte di un oggetto infinito può essere grande come l'intero oggetto. A prima vista sembra che questo ci dovrebbe portare al conflitto con la teoria di Cantor. Come vedremo in seguito, il postulato invece non contraddice la teoria di Cantor perché (e qui sottolineammo l'importanza del postulato 2) le due teorie, pur osservando gli stessi oggetti matematici, usano strumenti diversi e hanno accuratezza diversa. Nello stesso modo, le due lenti di cui sopra osservano lo stesso oggetto e danno risultati diversi, entrambi corretti ma con precisione diversa.

3. Introduzione dell'unità infinita per misurare insiemi infiniti

Dopo aver formulato i tre principi metodologici che utilizzeremo, possiamo cominciare ad introdurre il nuovo modo per esprimere e manipolare algebricamente le quantità infinite ed infinitesime. Per agevolare questo compito, sarà utile considerare un esempio che sarà ripreso più volte nel seguito.

Immaginiamo di avere un granaio con una quantità enorme di chicchi (tutti uguali), impossibili da contare uno per uno perché sono tantissimi. Chiaramente, la risposta molti (o moltissimi) è corretta ma la sua precisione è bassa. Vogliamo invece rispondere alla domanda su quanto grano ci sia nel nostro granaio con una precisione più alta. Potremo rispondere a questo quesito se disponiamo di tanti sacchi (di nuovo tutti uguali) che potremo riempire e, quindi, contare. Supponiamo che i sacchi sono grandi e non sappiamo quanti chicchi possano contenere ma sappiamo che tutti i sacchi possono contenere lo stesso numero di chicchi. Semplicemente procediamo riempiendo un sacco dopo l'altro. Allora, saremo in grado di esprimere la quantità del grano usando due unità di misura: sacchi e chicchi. Se il granaio è grande, allora possiamo continuare ad introdurre nuove unità di misura: i camion ed i vagoni di treno. Di nuovo, supponiamo che tutti i camion possano contenere lo stesso numero di sacchi e tutti i vagoni di treno lo stesso numero di camion anche se questi numeri sono a noi sconosciuti. Alla fine otterremo una risposta del tipo: nel nostro granaio ci sono 25 vagoni di treno, 8 camion, 15 sacchi e 37 chicchi di grano.

Possiamo notare immediatamente, che aggiungendo al granaio un chicco o togliendo un camion, possiamo registrare se abbiamo ottenuto più grano o meno *e di quanto*. La cosa interessante è che noi siamo in grado di dare risposte precise sulla quantità del grano anche se non sappiamo quanti chicchi ci sono in un sacco, quanti sacchi ci sono in un camion e quanti camion in un vagone di treno. Quindi, lavorando con queste nuove unità di misura – sacchi, camion, e vagoni di treno – possiamo descrivere quantità di grano che sarebbero inesprimibili se venisse usata solo l'unità di misura elementare – il chicco.

Ora diventa chiaro come occorre procedere: dobbiamo estendere l'idea dell'introduzione delle nuove unità di misura da insiemi e numeri grandi ma finiti a insiemi e numeri infiniti. Lo possiamo fare estrapolando dal finito all'infinito il fatto che n è il numero di elementi dell'insieme $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Introduciamo quindi una nuova *unità di misura infinita* - il numero degli elementi nell'insieme dei numeri naturali $\mathcal{N}=\{1, 2, 3, \dots\}$. Per indicare questo numero useremo il simbolo $\textcircled{1}$ che chiameremo in inglese 'grossone', cioè unità grande, che anche in italiano si legge in modo diretto e simpatico – il grossone. La sua introduzione ci permetterà di scrivere l'insieme dei numeri naturali come $\mathcal{N}=\{1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}\}$. Seguendo l'analogia con il grano possiamo considerare $\textcircled{1}$ come il numero dei chicchi in un sacco.

Il grossone viene introdotto attraverso le sue proprietà (in modo analogo, nel passato, per passare dai numeri naturali ai numeri interi $\mathcal{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$ è stato introdotto un nuovo numero – lo zero – per il quale è stato scelto un nuovo numerale "0" e questo nuovo numero è stato descritto attraverso le sue proprietà, cioè, per qualsiasi numero a segue $a + 0 = 0 + a = a$, etc.). Il

seguito Assioma dell'Unità Infinita viene aggiunto agli assiomi dei numeri reali (gli assiomi vengono interpretati nel senso di descrizioni delle quali abbiamo precedentemente discusso) e quindi assumiamo che per $\mathbb{1}$ valgono le solite proprietà dei numeri reali (associativa, distributiva, ecc.). L'Assioma dell'Unità Infinita⁴ descrive le proprietà del grossone che sono le seguenti:

Assioma dell'Unità Infinita.

- Il grossone è maggiore di qualsiasi numero naturale finito, cioè, $\mathbb{1} > n$, dove $n \in \mathcal{N}$ è un numero finito.
- Il grossone è un numero e, quindi, si comporta con i numeri 0 e 1 come tutti gli altri numeri:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \mathbb{1} = 0, & \quad \mathbb{1} \cdot 0 = 0, & \quad \mathbb{1} - \mathbb{1} = 0, \\ \mathbb{1} : \mathbb{1} = 1, & \quad \mathbb{1}^0 = 1, & \quad 0^{\mathbb{1}} = 0, & \quad 1^{\mathbb{1}} = 1. \end{aligned}$$

- L'insieme dei numeri naturali $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ si può dividere in n (con $n \in \mathcal{N}$ dove n è un numero finito) parti

$$\mathcal{N}_{k,n} = \{ k, k+n, k+2n, k+3n, \dots \}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

che hanno tutte $\mathbb{1}/n$ elementi. Per esempio, per $n=2$ otteniamo due insiemi (i numeri dispari ed i numeri pari, rispettivamente)

$$\mathcal{N}_{1,2} = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots \},$$

$$\mathcal{N}_{2,2} = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots \}$$

aventi entrambi $\mathbb{1}/2$ elementi. Se prendessimo $n=3$, allora otterremmo tre insiemi

$$\mathcal{N}_{1,3} = \{ 1, 4, 7, 10, 13, \dots \},$$

$$\mathcal{N}_{2,3} = \{ 2, 5, 8, 11, 14, \dots \},$$

$$\mathcal{N}_{3,3} = \{ 3, 6, 9, 12, 15, \dots \}$$

aventi ciascuno $\mathbb{1}/3$ elementi.

Applicando il postulato 3 definiamo e misuriamo parti dell'insieme \mathcal{N} utilizzando frazioni di $\mathbb{1}$. Per esempio, l'insieme dei numeri pari ha $\mathbb{1}/2$ elementi. Osserviamo che non calcoliamo i suoi elementi uno per uno – non lo possiamo fare perché l'insieme è infinito e noi abbiamo accettato il postulato 1 – ma nonostante ciò, sapendo che l'intero ha $\mathbb{1}$ elementi, concludiamo che la sua metà ha la metà degli elementi di \mathcal{N} , cioè $\mathbb{1}/2$. Ritornando all'esempio del granaio: noi non sappiamo quanti chicchi ci sono in un sacco ma sappiamo che la metà del sacco contiene la metà del grano che contiene tutto il sacco. Chiaramente, dalla terza parte dell'assioma deriva immediatamente che $\mathbb{1}$ è divisibile per ogni numero finito intero (condividendo questa proprietà con zero).

L'introduzione del grossone ci permette di scrivere l'insieme dei numeri naturali nella forma

$$\mathcal{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \mathbb{1}-5, \mathbb{1}-4, \mathbb{1}-3, \mathbb{1}-2, \mathbb{1}-1, \mathbb{1} \}.$$

I sistemi numerali tradizionali usati per esprimere i numeri finiti non ci permettevano di vedere i numeri naturali infiniti $\mathbb{1}, \mathbb{1}-1, \mathbb{1}-2, \dots$ nello stesso modo in cui il sistema primitivo dei Pirahã non

⁴ Nell'Assioma, gli insiemi infiniti verranno descritti nella forma tradizionale, cioè senza indicare l'ultimo elemento. Per esempio, l'insieme dei numeri naturali sarà scritto nell'Assioma nella forma $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ invece di $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots, \mathbb{1}\}$. Sottolineiamo che abbiamo a che fare con lo stesso oggetto – l'insieme dei numeri naturali – che però viene visto con due strumenti diversi: il primo è un sistema numerale che non permette di esprimere i numeri naturali infiniti ed il secondo, quello che coinvolge $\mathbb{1}$, offre questa possibilità. Nel seguito sarà discusso in dettaglio come diventa possibile calcolare il numero di elementi di certi insiemi infiniti e come esprimere questi numeri usando i numerali basati su $\mathbb{1}$.

permette di vedere i numeri 3, 4, 5, ecc. Notiamo anche l'esistenza di altri numeri infiniti interi come, per esempio,

$$\dots \textcircled{1}/3-3, \textcircled{1}/3-2, \textcircled{1}/3-1, \textcircled{1}/3, \textcircled{1}/3+1, \textcircled{1}/3+2, \textcircled{1}/3+3, \dots$$

$$\dots \textcircled{1}/2-3, \textcircled{1}/2-2, \textcircled{1}/2-1, \textcircled{1}/2, \textcircled{1}/2+1, \textcircled{1}/2+2, \textcircled{1}/2+3, \dots$$

Esistono anche i numeri interi maggiori di grossone chiamati *numeri naturali estesi* come, per esempio, $\textcircled{1}^2$, $5.1\textcircled{1}^3$, $\textcircled{1}^\textcircled{1}$, dei quali parleremo in seguito.

4. Numero di elementi di alcuni insiemi infiniti e successioni infinite

L'introduzione dell'Unità Infinita ci permette immediatamente di risolvere molti problemi legati al calcolo del numero di elementi di insiemi infiniti. Vediamone alcuni esempi.

Esempio 1. Supponiamo di togliere dall'insieme dei numeri naturali trenta numeri qualsiasi. Quanti numeri rimarranno nell'insieme?

Soluzione. L'insieme dei numeri naturali \mathcal{N} ha $\textcircled{1}$ elementi. Ne abbiamo tolto trenta, quindi rimarranno $\textcircled{1}-30$ elementi. Usando l'interpretazione del granaio il numero $\textcircled{1}-30$ può essere interpretato come il numero di chicchi in un sacco dopo che dal sacco pieno sono stati tolti trenta chicchi.

Esempio 2. Trovare il numero di elementi dell'insieme dei numeri interi

$$\mathcal{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

Soluzione. L'insieme \mathcal{Z} contiene i numeri naturali $\{ 1, 2, 3, \dots \}$ (che sono $\textcircled{1}$), i numeri naturali moltiplicati per -1, cioè $\{ \dots -3, -2, -1 \}$ (che, quindi, sono pure $\textcircled{1}$) e lo zero. Risultato finale: l'insieme \mathcal{Z} ha $\textcircled{1}+\textcircled{1}+1=2\textcircled{1}+1$ elementi e ora può essere scritto nel modo seguente

$$\mathcal{Z} = \{ -\textcircled{1}, -\textcircled{1}+1, -\textcircled{1}+2, \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \textcircled{1}-2, \textcircled{1}-1, \textcircled{1} \}.$$

Usando l'interpretazione del granaio il numero $2\textcircled{1}+1$ può essere interpretato come il numero di chicchi in due sacchi più un chicco.

Esempio 3. Trovare il numero di elementi dell'insieme A che è l'unione dell'insieme dei numeri naturali pari con l'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Soluzione. Sappiamo che l'insieme dei numeri naturali pari $\mathcal{N}_{2,2}$ ha $\textcircled{1}/2$ elementi. I numeri 1, 3 e 5 sono dispari e, quindi, non appartengono all'insieme $\mathcal{N}_{2,2}$. Quindi, l'insieme A ha tre elementi in più rispetto all'insieme $\mathcal{N}_{2,2}$. Risultato finale: l'insieme A ha $\textcircled{1}/2+3$ elementi. Usando l'interpretazione del granaio il numero $\textcircled{1}/2+3$ può essere interpretato come il numero di chicchi nella metà di un sacco più tre chicchi.

Esempio 4. Trovare il numero di elementi nell'insieme B costruito nel modo seguente:

$$B = (\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}) \setminus \{3, 9, 15\}.$$

Soluzione. Il primo insieme tra le parentesi essendo l'insieme dei numeri dispari $\mathcal{N}_{1,2}$ ha $\textcircled{1}/2$ elementi. Il secondo insieme è $\mathcal{N}_{3,3}$ ed ha $\textcircled{1}/3$ elementi. L'intersezione di questi due insiemi è $\{ 3, 9, 15, 21, \dots \}$, cioè l'insieme $\mathcal{N}_{3,6}$ che, per l'assioma di grossone, ha $\textcircled{1}/6$ elementi. Togliendo da questo risultato i tre numeri dell'insieme $\{ 3, 9, 15 \}$ otteniamo il risultato finale: l'insieme B ha $\textcircled{1}/6 - 3$ elementi (nell'interpretazione del granaio: la sesta parte del sacco meno tre chicchi).

Esempio 5. Contare il numero di elementi nell'insieme C costruito nel modo seguente:

$$C = \{ (a, b) : a \in \mathcal{N}, b \in \mathcal{N} \}.$$

Soluzione. In questo esercizio abbiamo l'insieme C , i cui elementi sono tutte e sole le coppie dei numeri naturali. Sappiamo dal calcolo combinatorio che, disponendo di due posizioni, ciascuna delle quali può essere riempita con k simboli, il numero di coppie possibili è k^2 . Nel nostro caso, poiché \mathcal{N} ha $\textcircled{1}$ elementi, $k = \textcircled{1}$. Quindi, l'insieme C ha $\textcircled{1}^2$ elementi.

Dopo aver considerato questo esempio si possono facilmente trovare esempi di insiemi che hanno, per esempio, $\textcircled{1}^2$, $5\textcircled{1}^3$, $\textcircled{1}^{\textcircled{1}}$ elementi.

Esempio 6. Quanti sono i numerali del tipo $\frac{p}{q}$ dove sia p che q sono numeri naturali?

Soluzione. Nell'esempio bisogna trovare il numero di elementi dell'insieme di numerali

$$F = \{ \frac{p}{q} : p \in \mathcal{N}, q \in \mathcal{N} \}.$$

Analogamente all'esercizio precedente, nel quoziente $\frac{p}{q}$ abbiamo due posizioni e, visto che sia p che q sono numeri naturali e, quindi, possono assumere i valori da 1 a $\textcircled{1}$, il numero di coppie possibili è $\textcircled{1}^2$. Si noti che questo non è il numero di elementi dell'insieme dei numeri razionali positivi. Infatti, in questo esercizio abbiamo contato *numerali diversi* che possono esprimere lo stesso numero. Per esempio, il numero $\frac{1}{2}$ può essere espresso da $\textcircled{1}$ numerali diversi ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ e così via) che sono stati tutti contati. Quindi, il numero ottenuto di elementi di F , $\textcircled{1}^2$, è una stima superiore della quantità di numeri razionali positivi.

Esempio 7. Consideriamo l'insieme D che contiene i numeri naturali del tipo n^3 , cioè

$$D = \{ 1, 8, 27, 64, \dots \}.$$

Quanti numeri di questo tipo ci sono nell'insieme dei numeri naturali?

Soluzione. Poiché l'insieme dei numeri naturali contiene $\textcircled{1}$ elementi e $\textcircled{1}$ è l'ultimo numero naturale, per rispondere alla domanda dobbiamo trovare il più grande numero naturale n tale che $n^3 \leq \textcircled{1}$. Quindi l'insieme D ha k elementi dove k è la parte intera della radice cubica del grossone, cioè, $k = [\textcircled{1}^{1/3}]$ dove $[u]$ è la parte intera di u .

Bisogna notare che il nuovo sistema numerale, sebbene sia più potente di quelli tradizionali, non può dare risposta a *tutte* le domande sugli insiemi infiniti (anche, e soprattutto, per via dei postulati 1 e 2). Per esempio, questo sistema è troppo debole per rispondere alla domanda: Quanti elementi ci sono nell'insieme dei numeri naturali estesi, $\check{\mathcal{N}}$, dove

$$\check{\mathcal{N}} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \textcircled{1}-5, \textcircled{1}-4, \textcircled{1}-3, \textcircled{1}-2, \textcircled{1}-1, \textcircled{1}, \textcircled{1}+1, \textcircled{1}+2, \dots \textcircled{1}^2-1, \textcircled{1}^2, \textcircled{1}^2+1, \dots \textcircled{1}^{\textcircled{1}}-1, \textcircled{1}^{\textcircled{1}}, \textcircled{1}^{\textcircled{1}}+1, \dots \}.$$

Per rispondere a questa domanda è necessario introdurre un sistema numerale più potente. Per esempio, introducendo il simbolo $\textcircled{2}$ che dovrebbe essere opportunamente definito. Ricordiamo inoltre che la quantità dei numeri che possiamo osservare in ogni insieme (finito o infinito) dipende dalla forza del sistema numerale usato per l'osservazione. Ricordiamo che i Pirahã nell'insieme $\mathcal{N}e$, come conseguenza, anche nell'insieme $\check{\mathcal{N}}$ sono in grado di vedere solo i numeri 1 e 2.

Per rispondere alle domande legate all'uso del sistema numerale posizionale del tipo “Quanti numeri possiamo esprimere nel sistema posizionale?” o “Quanti punti ci sono nell'intervallo $[0,1)$?” dobbiamo capire come osservare con la lente della nuova metodologia un concetto matematico fondamentale come quello relativo alle successioni infinite. Usando il linguaggio tradizionale una

successione è usualmente definita come una sequenza infinita di oggetti, detti termini della successione. Formalmente una successione $\{a_n\}$, con $a_n \in A$ per ogni $n \in \mathcal{N}$, viene definita come una funzione da \mathcal{N} in A .

L'Assioma dell'Unità Infinita invece introduce $\textcircled{1}$ come il numero di elementi di \mathcal{N} . Da questo segue che ogni successione infinita ha un numero di termini uguale a $\textcircled{1}$ se il suo dominio è esattamente l'insieme dei numeri naturali. Siccome grazie a grossone possiamo distinguere diversi numeri infiniti ed insiemi infiniti che hanno meno di grossone elementi, possono esistere le successioni infinite che hanno meno di grossone elementi. E' opportuno dunque introdurre una nuova definizione che precisa il precedente concetto di successione: una successione si dirà *completa* se essa è composta esattamente da $\textcircled{1}$ elementi ed *incompleta* se essa ha meno di $\textcircled{1}$ elementi. Quindi, come accade per le successioni finite, per definire una successione è necessario definire non solo il suo termine generico ma anche il numero dei suoi elementi. Per esempio, le seguenti due successioni hanno lo stesso termine generico $a_n = 3n$ ma sono diverse perché la prima ha grossone elementi e quindi è completa, la seconda invece ha $\frac{1}{3}\textcircled{1}-2$ elementi e non è completa

$$\{3, 6, 9, \dots, 3\textcircled{1}-6, 3\textcircled{1}-3, 3\textcircled{1}\}, \quad \{3, 6, 9, \dots, 3\textcircled{1}-9, 3\textcircled{1}-6\}.$$

Il fatto di distinguere diverse successioni infinite e l'impossibilità per una successione di avere più di grossone elementi ci permette di rispondere alle domande poste in precedenza che riguardano il sistema posizionale⁵. Consideriamo i numeri reali esprimibili nel sistema posizionale con base finita b con i numerali

$$(a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0.a_1a_2 \dots a_q \textcircled{1}a_q)_b.$$

Un numero in questo sistema viene rappresentato da due successioni di cifre: n cifre per la parte intera e q cifre per la parte frazionaria dove le cifre possono assumere i valori $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Chiameremo il numero di numeri reali esprimibili in questo sistema numerale come \mathcal{R}_{bnq} . La prima osservazione che possiamo fare grazie alla possibilità di osservare l'ultimo elemento di successioni infinite è che tutti numerali in \mathcal{R}_{bnq} rappresentano diversi numeri. Per esempio, nel sistema posizionale decimale con $n = q = \textcircled{1}$, cioè nel $\mathcal{R}_{10\textcircled{1}\textcircled{1}}$, i seguenti due numerali

$$\underbrace{1.000\dots000}_{\text{grossonecifre}}, \quad \underbrace{0.999\dots999}_{\text{grossonecifre}}$$

sono diversi e rappresentano numeri diversi. Diventa quindi possibile eseguire l'operazione di sottrazione tra di loro ottenendo come risultato il più piccolo numero positivo esprimibile nel sistema numerale $\mathcal{R}_{10\textcircled{1}\textcircled{1}}$ che non era visibile usando il sistema posizionale tradizionale

$$\underbrace{1.000\dots000}_{\text{grossonecifre}} - \underbrace{0.999\dots999}_{\text{grossonecifre}} = \underbrace{0.000\dots001}_{\text{grossonecifre}}.$$

Infatti, com'è ben noto, il sistema posizionale decimale tradizionale non riesce a distinguere i numerali $1.000\dots$ e $0.999\dots$. Un'altra particolarità consiste nel fatto che ora possiamo indicare esplicitamente il più piccolo ed il più grande numero esprimibile nel sistema numerale posizionale \mathcal{R}_{bnq} . Per esempio, per il sistema decimale $\mathcal{R}_{10\textcircled{1}\textcircled{1}}$ sono, rispettivamente,

$$\underbrace{-999\dots999}_{\text{grossonecifre}} \cdot \underbrace{.999\dots999}_{\text{grossonecifre}}, \quad \underbrace{.999\dots999}_{\text{grossonecifre}} \cdot \underbrace{.999\dots999}_{\text{grossonecifre}}.$$

Possiamo anche calcolare il numero di elementi di \mathcal{R}_{bnq} . Dal calcolo combinatorio sappiamo che $n+q$ posizioni possono essere riempiti con b simboli in b^{n+q} modi diversi, quindi, il numero di

⁵ Per una discussione molto più completa sulle successioni infinite invitiamo il lettore interessato a consultare il lavoro [20] dove vengono discusse le basi dell'analisi matematica per le funzioni che possono assumere valori infiniti ed infinitesimi su domini anche essi infiniti ed infinitesimi. Inoltre, notiamo che il concetto di successione infinita con un numero determinato di elementi gioca un ruolo importante nello studio delle macchine di Turing (si vedano [29-31]).

elementi di \mathcal{R}_{bnq} è uguale a b^{n+q} . Poiché nel sistema posizionale \mathcal{R}_{bnq} abbiamo due successioni di cifre, dal ragionamento fatto sopra sulle successioni infinite segue che sia per n che per q valgono le limitazioni

$$n \leq \textcircled{1}, \quad q \leq \textcircled{1}.$$

Quindi, il numero più grande di numerali esprimibili in questo sistema numerale si ha per $n = q = \textcircled{1}$, cioè il sistema numerale \mathcal{R}_{bnq} massimale (con più numerali) è il sistema $\mathcal{R}_{\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}}$ che ha $b^{2\textcircled{1}}$ numerali. Per esempio, il sistema posizionale binario $\mathcal{R}_{2\textcircled{1}\textcircled{1}}$ ha $2^{2\textcircled{1}}$ numerali ed il sistema posizionale decimale $\mathcal{R}_{10\textcircled{1}\textcircled{1}}$ ha $10^{2\textcircled{1}} > 2^{2\textcircled{1}}$ numerali.

Ricordiamo che nel suo famoso argomento diagonale Cantor parlando della cardinalità dei numeri reali non fa distinzione tra lo strumento (il sistema numerale posizionale) e l'oggetto (l'insieme dei numeri reali) e parla dei numeri espressi nel sistema posizionale identificandoli con tutti i numeri reali. Inoltre, non c'è la distinzione tra la quantità dei numerali scritti nel sistema binario oppure nel sistema decimale dando in entrambi i casi la stessa risposta – abbiamo a che fare con la quantità infinita della potenza del continuo. Sottolineiamo di nuovo che il nostro risultato non contraddice i risultati di Cantor ma propone l'impiego di una lente più precisa che permette di osservare gli insiemi infiniti con una maggiore accuratezza.

In un certo senso abbiamo confermato nella maniera costruttiva i risultati di Cantor. Infatti, secondo Cantor la cardinalità del continuo è più grande della cardinalità del numerabile. Noi abbiamo dimostrato che usando la lente della nuova metodologia si possono distinguere insiemi che hanno la cardinalità del numerabile ma un numero di elementi infinito diverso tra di loro ($\frac{1}{3}\textcircled{1}$, $\frac{1}{2}\textcircled{1}$, $\textcircled{1}-30$, $2\textcircled{1}$, ecc.) e analogamente insiemi che hanno la cardinalità del continuo ($2^{\textcircled{1}}$, $2^{2\textcircled{1}}$, $10^{2\textcircled{1}}$, ecc.). Per sottolineare l'importanza dello strumento usato ed il fatto che per appartenere al secondo gruppo di insiemi il numero infinito di cifre deve essere sufficientemente grande notiamo che esistono gli insiemi che possono essere visti in entrambi i modi. Consideriamo come esempio l'insieme dei numerali $\mathcal{R}_{b1\textcircled{1}}$ che permette di esprimere tutti i b^q punti ⁶ dell'intervallo $[1,2)$ nel sistema posizionale

$$(1.a_1a_2 \dots a_{q-1}a_q)_b.$$

Vista l'analisi fatta in precedenza ci si aspetterebbe che per un q infinito avremo un insieme che, usando il vecchio linguaggio, avrebbe la potenza del continuo. Invece prendendo q uguale alla parte intera di $\log_b \textcircled{1}$ ed usando il fatto che $\log_b \textcircled{1}$ non è un numero intero ⁷ otteniamo

$$b^{\lfloor \log_b \textcircled{1} \rfloor} < b^{\log_b \textcircled{1}} = \textcircled{1}.$$

Quindi, l'insieme dei punti dell'intervallo $[1,2)$ espressi con il sistema numerale \mathcal{R}_{b1q} con $q = \lfloor \log_b \textcircled{1} \rfloor$ introdotto attraverso il sistema posizionale con un numero infinito di cifre frazionarie ha un numero di elementi inferiore a $\textcircled{1}$ e usando il vecchio linguaggio apparterebbe agli insiemi numerabili (una discussione più approfondita sull'argomento può essere trovata nel lavoro [25]).

5. Corrispondenza biunivoca e serie divergenti visti attraverso la lente della nuova metodologia

Usando la nuova unità di misura possiamo non solo calcolare il numero degli elementi in insiemi infiniti ma anche affrontare molti problemi considerati difficili o irrisolvibili nella matematica

⁶ Ricordiamo che il significato del concetto *tutti i punti* cambia in dipendenza dal sistema numerale usato per osservare i punti. Insieme con la scelta del sistema numerale per esprimere le coordinate dei punti scegliamo i punti che potremo osservare. In modo analogo i fisici al momento della scelta della lente da usare per il microscopio scelgono di fatto gli oggetti che saranno in grado di osservare.

⁷ Supponiamo che esistano interi b e x tali che $b^x = \textcircled{1}$ e b è un numero finito. Allora $\textcircled{1}$ sarebbe divisibile solo per b il che è impossibile dato che $\textcircled{1}$ è divisibile per tutti interi finiti.

tradizionale (ricordiamo il postulato 2: abbiamo costruito uno strumento più potente e ora possiamo dire di più su alcuni oggetti matematici). In particolare, utilizzando il nuovo approccio, molti paradossi, legati ai concetti di infinito ed infinitesimo, studiati in passato, ottengono spiegazioni semplici e coerenti.

Per esempio, torniamo al problema illustrato nell'introduzione e alla corrispondenza uno-ad-uno usata per concludere che entrambi gli insiemi, quello dei numeri dispari e quello dei numeri naturali hanno la potenza del numerabile nonostante l'insieme dei numeri dispari sia la metà dell'insieme dei numeri naturali. Usando la nuova terminologia possiamo scrivere con facilità non solo l'inizio del procedimento

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \end{array}$$

ma anche la parte finale di esso.

Per farlo prima di tutto bisogna notare che $\textcircled{1}$ è l'ultimo numero pari tra i naturali. Infatti, $\textcircled{1}$ è pari perché $\textcircled{1}/2$ è stato introdotto come il numero degli elementi di un insieme, e, di conseguenza, esso è un numero intero. Questo fatto implica immediatamente che il grossone è un numero pari. Ora vediamo perché $\textcircled{1}$ è l'ultimo numero pari tra i naturali. Il numero pari successivo a $\textcircled{1}$ è $\textcircled{1}+2$ il quale è un numero naturale *esteso*, $\textcircled{1}+2 \in \check{\mathcal{N}}$, ma non un numero naturale perché $\textcircled{1}+2 > \textcircled{1}$ e grossone è stato introdotto come l'ultimo numero naturale.

Se $\textcircled{1}$ è l'ultimo numero naturale pari, allora l'ultimo numero naturale dispari è $\textcircled{1}-1$ e l'insieme dei numeri naturali dispari può essere descritto nel modo seguente

$$\mathcal{N}_{1,2} = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, \textcircled{1}-5, \textcircled{1}-3, \textcircled{1}-1 \}$$

dove l'ultima parte contenente i numeri infiniti dispari non era visibile con i sistemi numerali tradizionali. Abbiamo stabilito che la quantità dei numeri dispari è uguale a $\textcircled{1}/2$. Quindi, l'ultimo numero naturale dispari $\textcircled{1}-1$ occupa la posizione numero $\textcircled{1}/2$ nella successione sopra descritta e possiamo scrivere la parte finale della procedura

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & \dots & \textcircled{1}-5, & \textcircled{1}-3, & \textcircled{1}-1 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots & \textcircled{1}/2-2, & \textcircled{1}/2-1, & \textcircled{1}/2 \end{array}$$

il che è perfettamente in linea con il modo in cui noi trattiamo gli insiemi finiti: la metà è due volte più piccola dell'intero.

Affrontiamo ora l'esempio di Galilei che considera la biezione tra i numeri interi positivi e i quadrati perfetti positivi scritta come segue

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2^2, & 3^2, & 4^2, & 5^2, & 6^2, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \end{array}$$

Per scrivere la parte finale di questa procedura dobbiamo trovare il numero di elementi dell'insieme

$$I^2 = \{ x \in \mathcal{N} : \exists i \in \mathcal{N}, x = i^2 \},$$

cioè, trovare il numero intero J tale che

$$J = \max\{ x \in \mathcal{N} : \exists i \in \mathcal{N}, x = i^2, x \leq \textcircled{1} \}$$

dove tutti gli x sono interi positivi. Risolvendo la disequazione $i^2 \leq \textcircled{1}$ con i intero positivo e prendendo il massimo otteniamo $J = [\textcircled{1}^{1/2}]$. Notiamo che una dimostrazione alternativa dello stesso risultato è stata proposta da Lolli in [9]. Possiamo quindi concludere la procedura di abbinamento

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1, & 2^2, & 3^2, & 4^2, & 5^2, & 6^2, & \dots & ([\mathbb{O}^{1/2}]-2)^2, & ([\mathbb{O}^{1/2}]-1)^2, & [\mathbb{O}^{1/2}]^2 \\
 \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots & [\mathbb{O}^{1/2}]-2, & [\mathbb{O}^{1/2}]-1, & [\mathbb{O}^{1/2}]
 \end{array}$$

Rileviamo di nuovo che il nuovo punto di vista non contraddice il punto di vista tradizionale che semplicemente non permette di vedere la parte finale del procedimento. Il linguaggio dei cardinali di Cantor assegna la stessa cardinalità ai due insiemi. Invece il nuovo punto di vista sottolinea la separazione dell'oggetto dallo strumento. Quindi, la conclusione è che lo strumento tradizionale – il linguaggio dei cardinali di Cantor – non è sufficientemente preciso per vedere che un insieme infinito è due volte più piccolo dell'altro. Questo fatto invece è perfettamente visibile con lo strumento nuovo – il sistema numerale che include il grossone. Quindi, abbiamo una situazione analoga a quella che avevamo nell'esempio con le due lenti del microscopio: entrambi i risultati – il tradizionale ed il nuovo – sono corretti ma la precisione del secondo è più elevata del primo.

Cerchiamo ora di capire meglio come si lavora con i numeri naturali ed i numeri naturali estesi studiando l'esempio seguente.

Esempio 8. Consideriamo l'insieme dei numeri naturali e moltiplichiamo ciascuno di essi per 2 ottenendo così i numeri pari. Si chiede di costruire l'insieme risultante, che chiameremo \mathcal{E}^2 , e di calcolare il numero dei suoi elementi.

Soluzione. Come abbiamo già detto più volte, l'introduzione di grossone ci permette di scrivere l'insieme dei numeri naturali nella forma

$$\mathcal{N} = \{ 1, 2, 3, \dots, \mathbb{O}/2-1, \mathbb{O}/2, \mathbb{O}/2+1, \dots, \mathbb{O}-2, \mathbb{O}-1, \mathbb{O} \}.$$

Esso contiene \mathbb{O} elementi, quindi, moltiplicando ciascuno di questi per due otterremo l'insieme \mathcal{E}^2 che anche esso avrà \mathbb{O} elementi. Siccome \mathbb{O} è l'ultimo numero naturale pari, $\mathbb{O}/2$ moltiplicato per 2 ci dà \mathbb{O} , e $\mathbb{O}/2+1$ moltiplicato per 2 ci dà $\mathbb{O}+2$ il quale è pari ma non è più naturale, esso è un numero naturale esteso. Infine, \mathbb{O} moltiplicato per 2 dà $2\mathbb{O}$ e così otteniamo l'insieme

$$\mathcal{E}^2 = \{ 2, 4, 6, \dots, \mathbb{O}-2, \mathbb{O}, \mathbb{O}+2, \dots, 2\mathbb{O}-4, 2\mathbb{O}-2, 2\mathbb{O} \}$$

che consiste di $\mathbb{O}/2$ numeri naturali pari (da 2 fino a \mathbb{O}) e di $\mathbb{O}/2$ numeri naturali pari estesi (da $\mathbb{O}+2$ fino a $2\mathbb{O}$).

Ora rivolgiamo la nostra attenzione alle serie divergenti. I nuovi numeri che noi possiamo distinguere grazie all'introduzione di \mathbb{O} ci permettono di calcolare la somma di serie divergenti come semplici espressioni. Si sa bene invece che la matematica tradizionale ha delle difficoltà a trattare serie divergenti. Per esempio, sulle serie $S_1 = 4+4+4+\dots$ e $S_2 = 5+5+5+\dots$ ci dice solo che entrambe divergono e le operazioni $S_1 - S_2$ e S_1/S_2 danno luogo a forme indeterminate, cioè non possiamo dire quale sia il loro risultato.

Usando la nuova terminologia e ricordando che ∞ si comporta come *molto*, la scrittura $S_1 = 4+4+4+\dots$ diventa una specie di "calcolate la somma di molti addendi uguali a 4". Ora, quando abbiamo a disposizione diversi numeri infiniti, possiamo tranquillamente lavorare con somme che hanno un numero infinito di addendi. Naturalmente, come succede con le somme con un numero finito di addendi, è necessario dire *quanti addendi ci sono nella somma*.

Se la prima somma S_1 ha k addendi e la seconda somma S_2 ha n addendi, allora

$$S_1(k) = \underbrace{4 + 4 + 4 + \dots + 4}_{k \text{ addendi}} = 4k,$$

$$S_2(n) = \underbrace{5 + 5 + 5 + \dots + 5}_{n \text{ addendi}} = 5n$$

indipendentemente dal fatto che n e k siano finiti o infiniti. Se, per esempio, entrambi i numeri sono infiniti ed uguali a $3\textcircled{1}$, cioè $k = n = 3\textcircled{1}$, allora si ottiene $S_1(3\textcircled{1}) = 12\textcircled{1}$, $S_2(3\textcircled{1}) = 15\textcircled{1}$ e possiamo eseguire tranquillamente le operazioni

$$\begin{aligned} S_2(3\textcircled{1}) - S_1(3\textcircled{1}) &= 15\textcircled{1} - 12\textcircled{1} = 3\textcircled{1}, \\ S_2(3\textcircled{1}) / S_1(3\textcircled{1}) &= 15\textcircled{1} / 12\textcircled{1} = 1,25. \end{aligned}$$

Osserviamo che abbiamo calcolato due somme con un numero infinito di addendi. I risultati di queste operazioni sono due numeri infiniti. In seguito, nell'operazione di divisione, abbiamo diviso uno per l'altro ed abbiamo ottenuto un numero finito. Naturalmente, cambiando i valori di k ed n otterremo dei risultati che dipenderanno da tali nuovi valori. Per esempio, per $k = \textcircled{1}/2$ ed $n = \textcircled{1}-2$ otteniamo $S_1(\textcircled{1}/2) = 2\textcircled{1}$, $S_2(\textcircled{1}-2) = 5\textcircled{1} - 10$ e la differenza ed il quoziente di questi valori sono

$$\begin{aligned} S_2(\textcircled{1}-2) - S_1(\textcircled{1}/2) &= (5\textcircled{1} - 10) - 2\textcircled{1} = 3\textcircled{1}-10, \\ S_2(\textcircled{1}-2) / S_1(\textcircled{1}/2) &= 2,5 - 5\textcircled{1}^{-1}. \end{aligned}$$

Possiamo anche calcolare la famosa serie $S_3 = 1-1+1-1+1-1+1\dots$ per la quale dobbiamo nuovamente dire a che cosa sia uguale il numero di addendi n e trattare $S_3(n)$ conseguentemente, sia nel caso di n finito che nel caso di n infinito. Quindi, se n è pari, cioè $n = 2k$, allora $S_3(2k) = 0$, se invece n è dispari, cioè $n = 2k+1$, allora $S_3(2k+1) = 1$. Per esempio, $S_3(\textcircled{1}) = 0$ e $S_3(\textcircled{1}+1) = 1$.

Ora, conoscendo il numero preciso (finito o infinito) degli addendi nelle somme, possiamo cambiare l'ordine di addendi nella somma senza cambiare il risultato, come succede per qualsiasi numero finito di addendi. Per esempio, $S_3 = 1-1+1-1+1-1+1\dots$ può essere riordinata nel modo seguente

$$S_3 = 1+1-1+1+1-1+1+1-1+1+1-1+1+\dots$$

Nella nuova metodologia dobbiamo fissare il numero di addendi nella somma. Consideriamo come esempio la somma $S_3(2\textcircled{1})$ che ha $2\textcircled{1}$ addendi

$$S_3(2\textcircled{1}) = \underbrace{1-1+1-1+\dots+1-1+1}_{2 \text{ grossone addendi}} = 0.$$

Eseguendo il riordinamento usato sopra notiamo che dopo aver fatto $\textcircled{1}/2$ addizioni $1+1-1$ abbiamo finito le unità positive e ci sono rimaste solo $\textcircled{1}/2$ unità negative che dobbiamo sommare, cioè

$$S_3(2\textcircled{1}) = \underbrace{1+1-1+\dots+1+1-1}_{3/2 \text{ grossone addendi}} + \underbrace{(-1-1\dots-1-1)}_{1/2 \text{ grossone addendi}} = \textcircled{1}/2 \cdot (1+1-1) + \textcircled{1}/2 \cdot (-1) = 0.$$

Le unità negative non erano visibili con il linguaggio tradizionale e, quindi, portavano al cambiamento del risultato. Infatti, il teorema di Riemann-Dini dice che se una serie è semplicemente convergente, ma non assolutamente convergente, allora, dato un qualsiasi numero reale, esiste una permutazione dei suoi termini che la rende convergente a tale numero. Il nostro risultato non contraddice il teorema perché i due linguaggi, il tradizionale ed il nuovo, hanno accuratze diverse. Ricordiamo che nel nostro esempio con due lenti diverse entrambi i risultati sono corretti, ma la loro precisione è diversa. Una discussione più approfondita sulle serie può essere trovata nei lavori [6,20,25,34] dove vengono discussi in dettaglio diversi risultati prodotti sia dall'approccio tradizionale che da quello nuovo (in particolare, gli appassionati della funzione zeta di Riemann troveranno nei lavori [25,34] diverse pagine dedicate a tale tematica). Intanto, concludiamo la sezione con altri due esempi.

Esempio 9. Calcolare la somma $S_4(\textcircled{1})$ che ha $\textcircled{1}$ addendi ed è costruita nel modo seguente:

$$S_4(\textcircled{1}) = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + (2\textcircled{1} - 6) - (2\textcircled{1} - 4) + (2\textcircled{1} - 2) - 2\textcircled{1}.$$

Soluzione. In questa somma abbiamo $\textcircled{1}/2$ addendi positivi e $\textcircled{1}/2$ addendi negativi. Raccogliamo insieme gli addendi positivi e quelli negativi

$$S_4(2\textcircled{1}) = (2 + 6 + \dots + (2\textcircled{1} - 6) + (2\textcircled{1} - 2)) - \\ - (4 + 8 + \dots + (2\textcircled{1} - 4) + 2\textcircled{1}).$$

Ora abbiamo due progressioni aritmetiche che possiamo calcolare facilmente. Sottraendo dalla somma infinita della prima progressione (uguale a $\textcircled{1}^2$) la somma infinita della seconda progressione (uguale a $\textcircled{1}^2 + 2\textcircled{1}$) otteniamo il risultato finale

$$S_4(2\textcircled{1}) = (2 + (2\textcircled{1} - 2)) \textcircled{1}/4 - (4 + 2\textcircled{1})\textcircled{1}/4 = -\textcircled{1}.$$

L'esempio successivo dimostra che, in dipendenza dal numero di addendi, sommando numeri infinitesimi si possono ottenere come risultato non solo numeri infinitesimi ma anche numeri finti ed infiniti.

Esempio 10. Calcolare la somma di tutti i numeri naturali e la somma $S_5(n)$ di n addendi per $n = \textcircled{1}$ e per $n = 2\textcircled{1}^2$ dove $S_5(n)$ è costruita nel modo seguente:

$$S_5(n) = \textcircled{1}^{-2} + 2\textcircled{1}^{-2} + 3\textcircled{1}^{-2} + \dots + (n-2)\textcircled{1}^{-2} + (n-1)\textcircled{1}^{-2} + n\textcircled{1}^{-2}.$$

Soluzione. Chiaramente, la richiesta di calcolare $S_5(\textcircled{1})$ è direttamente legata al calcolo della somma di tutti i numeri naturali. Infatti, abbiamo

$$S_5(\textcircled{1}) = \textcircled{1}^{-2} (1 + 2 + 3 + \dots + (\textcircled{1}-2) + (\textcircled{1}-1) + \textcircled{1})$$

dove tra le parentesi si trova proprio la somma di tutti i numeri naturali. Calcolando la somma della progressione aritmetica formata dai numeri naturali otteniamo

$$S_5(\textcircled{1}) = \textcircled{1}^{-2} (0.5\textcircled{1}(1+\textcircled{1})) = \textcircled{1}^{-2} (0.5\textcircled{1}^2 + 0.5\textcircled{1}) = 0.5 + 0.5\textcircled{1}^{-1}.$$

Quindi, sommando gli infinitesimi nella somma $S_5(\textcircled{1})$ abbiamo ottenuto come risultato un numero che ha una parte finita ed una parte infinitesima. La somma di tutti i numeri naturali è un numero infinito uguale a $0.5\textcircled{1}^2 + 0.5\textcircled{1}$. In modo completamente analogo possiamo calcolare la somma

$$S_5(\textcircled{1}^2) = \textcircled{1}^{-2} (\textcircled{1}^2(1+2\textcircled{1}^2)) = 2\textcircled{1}^2 + 1.$$

Il risultato ottenuto sommando gli infinitesimi è, quindi, un numero infinito che ha una parte infinita ed una parte finita.

6. L'Infinity Computer ed il calcolo numerico con infiniti ed infinitesimi

Ogni buona teoria ha bisogno di un proprio strumento di lavoro per diventare una scienza pratica. La metodologia qui presentata è stata usata dall'autore come punto di partenza per lo sviluppo di un nuovo tipo di calcolatore – l'Infinity Computer – per il quale sono stati ottenuti diversi brevetti internazionali [21]. Il nuovo calcolatore è in grado di eseguire calcoli numerici (e non simbolici) con i numeri finiti, infiniti ed infinitesimi basati sul concetto di grossone.

Questa invenzione permette di trasformare un'area di conoscenza considerata da sempre molto teorica e complicata in una scienza pratica con un proprio strumento di calcolo. Laddove in precedenza ci si fermava di fronte a grandezze infinitesime, infinite o indeterminate (come per esempio, infinito meno infinito) ora si potrà grazie alla nuova metodologia non solo andare avanti con i calcoli ma anche eseguirli in modo automatico sull'Infinity Computer. Avendo a disposizione uno strumento di calcolo così potente si aprono degli orizzonti veramente vasti per la costruzione di nuovi modelli del mondo reale, come anche per migliorare la precisione di modelli esistenti, ecc. (si vedano gli articoli citati nella bibliografia per diverse applicazioni). Diamo, quindi, una breve descrizione del nuovo calcolatore.

L'Infinity Computer lavora con i numeri rappresentati nel sistema posizionale con base $\textcircled{1}$. Consideriamo qui solo le potenze finite di $\textcircled{1}$ che possono essere intere o frazionarie. Allora ogni

numero può contenere diverse potenze di grossone e può avere diverse parti infinite (cioè quelle che hanno come esponente di $\textcircled{1}$ un numero positivo) ed infinitesime (quelle che hanno come esponente di $\textcircled{1}$ un numero negativo), la parte finita (corrispondente a $\textcircled{1}^0$) può essere presente oppure no. Ricordiamo che $\textcircled{1}^0 = 1$, quindi, qualsiasi numero finito a può essere scritto come $a\textcircled{1}^0$. Così, il seguente numerale $8.31\textcircled{1}^0 = 8.31$. Come esempio successivo consideriamo il numerale

$$12\textcircled{1}^{6.5}-8.2\textcircled{1}^032\textcircled{1}^{-18.2} = 12\textcircled{1}^{6.5} - 8.2\textcircled{1}^0 + 32\textcircled{1}^{-18.2}$$

che rappresenta un numero infinito fatto di una parte infinita uguale a $12\textcircled{1}^{6.5}$, di una parte finita uguale a $-8.2\textcircled{1}^0$ e di una parte infinitesima uguale a $32\textcircled{1}^{-18.2}$. I numerali 12, -8.2 e 32 vengono chiamati *grosscifre* perché, al contrario alle cifre che vengono usate nei sistemi posizionali con una base finita e vengono rappresentate con un simbolo solo, qui abbiamo bisogno di più simboli per esprimere quante quantità corrispondenti ad ogni esponente sono presenti nel nostro numero. Le grosscifre possono essere positive o negative ed essere intere oppure frazionarie.

I numerali che contengono solo le parti con esponenti negativi di $\textcircled{1}$ rappresentano gli infinitesimi. Per esempio, il numerale

$$3.1\textcircled{1}^{-1.2}62.5\textcircled{1}^{-8.7}-7.8\textcircled{1}^{-704.9} = 3.1\textcircled{1}^{-1.2} + 62.5\textcircled{1}^{-28.7} - 7.8\textcircled{1}^{-704.9}$$

rappresenta un infinitesimo che contiene tre parti infinitesime di potenze -1.2, -8.7 e -704.9, rispettivamente.

Vediamo ora come vengono eseguite le operazioni aritmetiche in questo sistema numerale. L'addizione e la sottrazione sono estremamente semplici, dobbiamo solo raccogliere le potenze di grossone tra gli operandi e, se ci sono esponenti uguali, eseguire l'addizione o la sottrazione con le rispettive grosscifre. Per esempio,

$$12\textcircled{1}^{6.5}-8.2\textcircled{1}^032\textcircled{1}^{-18.2} + 6\textcircled{1}^{12.5} = 6\textcircled{1}^{12.5}12\textcircled{1}^{6.5}-8.2\textcircled{1}^032\textcircled{1}^{-18.2}.$$

Le operazioni di moltiplicazione e divisione vengono presentate nelle Figure 1 e 2 dove sono eseguite sul primo semplice prototipo di una calcolatrice - l'Infinity Calculator - che usa la tecnologia dell'Infinity Computer ed è in grado di eseguire le quattro operazioni aritmetiche con numeri infiniti, finiti ed infinitesimi.

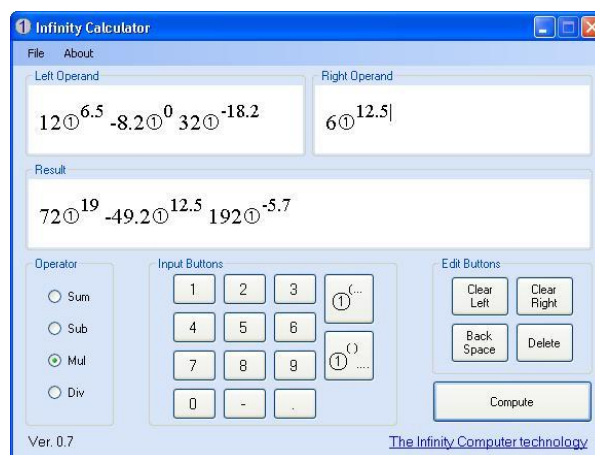


Figura 1. Un esempio di moltiplicazione sulla calcolatrice che usa la tecnologia dell'Infinity Computer per eseguire le operazioni aritmetiche con numeri finiti, infiniti ed infinitesimi

La Figura 1 mostra un'immagine dell'Infinity Calculator sul quale viene eseguita l'operazione di moltiplicazione tra due numeri infiniti. La finestra 'Left Operand' contiene il numero $12\textcircled{1}^{6.5}-8.2\textcircled{1}^032\textcircled{1}^{-18.2}$ che viene moltiplicato per il numero infinito $6\textcircled{1}^{12.5}$ visualizzato nella finestra 'Right Operand'. Il risultato della moltiplicazione, che ha due parti infinite ed una parte infinitesima, viene

mostrato nella finestra 'Result'. Si può vedere immediatamente che il risultato si ottiene in modo molto semplice. In particolare, la prima parte infinita, $72 \odot^{19}$, viene costruita usando i risultati di queste due operazioni: $12 \cdot 6 = 72$, $6.5 + 12.5 = 19$. L'operazione di divisione viene presentata nella Figura 2. Il risultato è un numero infinitesimo che ha tre parti infinitesime.

Illustriamo i vantaggi pratici che si possono ottenere usando il nuovo calcolatore con due esempi legati al mondo di calcolo numerico. Il primo di essi riguarda il calcolo numerico delle derivate.

Si sa che in molte applicazioni pratiche bisogna calcolare funzioni e loro derivate mediante codici di calcolo molto complessi e sconosciuti all'utente (per esempio, il codice di calcolo può essere coperto da segreto industriale). In tali applicazioni, tipicamente l'utente fornisce in input al programma un valore x ed esso restituisce il corrispondente valore della funzione $f(x)$ e la derivata $f'(x)$ senza spiegare come siano stati calcolati tali valori. Molto spesso l'utente ha a sua disposizione solo il codice per calcolare $f(x)$ ed è costretto ad usare metodi di calcolo numerico per approssimare la derivata $f'(x)$. Il modo più semplice per farlo consiste nello scegliere un piccolo numero h ed usare una delle formule seguenti:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

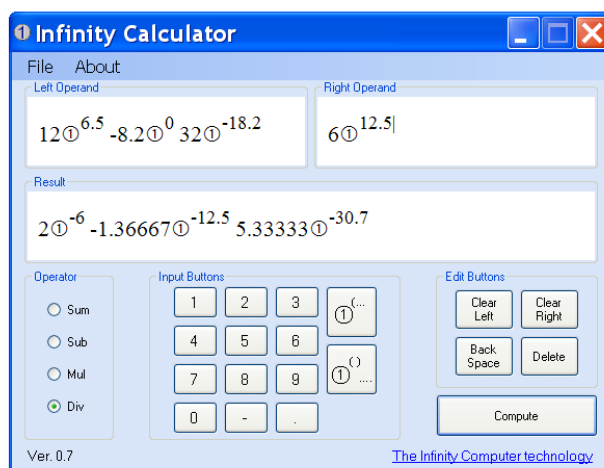


Figura 2. Un esempio di divisione

Chiaramente, per i valori grandi di h ci sono grandi errori di approssimazione e, dal punto di vista teorico, quando $h \rightarrow 0$ tutte e tre formule forniscono risultati che tendono alla derivata $f'(x)$ nel punto x . In pratica invece non è così. Poiché i numeri sul calcolatore sono rappresentati con un numero finito (e ben definito per ogni calcolatore o programma di calcolo) di cifre, non si può diminuire h al di sotto di un certo valore. Inoltre, molto spesso (e sempre per la stessa ragione legata alla rappresentazione dei numeri) per valori piccoli di h si ottiene che i punti $x-h$, x ed $x+h$ diventano troppo vicini ed il computer non riesce a calcolare i valori di $f(x-h)$, $f(x)$ ed $f(x+h)$ con una precisione sufficiente restituendo in tutti e tre casi lo stesso valore approssimato e, pertanto, facendo sì che diventi impossibile utilizzare le formule di approssimazione sopra citate poiché si otterrebbe:

$$f(x+h) - f(x) = 0, \quad f(x) - f(x-h) = 0, \quad f(x+h) - f(x-h) = 0.$$

Supponiamo adesso che il codice che calcola $f(x)$ (e che ipotizziamo essere sconosciuto all'utente) fosse realizzato sull'Infinity Computer. Come possiamo stimare la derivata $f'(x)$ in questo caso? La risposta alla domanda viene data nel lavoro [24] e illustrata con l'esempio successivo.

Esempio 11. Calcolare i valori della funzione $f(x)$ e delle sue prime tre derivate nel punto $x = 5$ dove la funzione $f(x) = x^3$ è realizzata sull'Infinity Computer e la forma analitica di $f(x)$ è sconosciuta a chi vuole calcolare $f(5)$, $f'(5)$, $f''(5)$, $f^{(3)}(5)$.

Soluzione. Invece di utilizzare le formule di approssimazione sopra citate chiediamo all'Infinity Computer di calcolare il valore $f(5 + \textcircled{-1})$. Il computer esegue il calcolo e ci restituisce il numero

$$f(5 + \textcircled{-1}) = 125\textcircled{0}75\textcircled{-1}15\textcircled{-2}1\textcircled{-3}$$

fatto della parte finita uguale a 125 e da tre parti infinitesime: $75\textcircled{-1}$, $15\textcircled{-2}$, $1\textcircled{-3}$. Si può vedere immediatamente che le grosscifre che fanno parte di $f(5 + \textcircled{-1})$ ci permettono di ottenere i valori *esatti* (dove la parola *esatti* significa: con l'accuratezza dell'implementazione del codice di $f(x)$) di $f(5)$ e di tutte le derivate richieste. Infatti, la grosscifra della parte finita, 125, è esattamente il valore di $f(5)$. La grosscifra 75 della prima parte infinitesima ci da la derivata prima esatta $f'(5)$. La grosscifra 15 della seconda parte infinitesima ci permette di calcolare la derivata seconda esatta $f''(5)$. Infine, la grosscifra 1 della terza parte infinitesima ci permette di calcolare la derivata terza $f^{(3)}(5)$, anche essa esatta

$$f(5) = 125, \quad f'(5) = 75, \quad f''(5) = 2! \cdot 15 = 30, \quad f^{(3)}(5) = 3! \cdot 1 = 6.$$

Quindi, l'Infinity Computer permette di evitare l'uso delle approssimazioni e di calcolare le derivate esatte avendo solo il codice della funzione $f(x)$. Ciò avviene grazie al fatto che l'Infinity Computer ordina le grosspotenze nel modo decrescente durante i calcoli. In questo modo, il computer valutando $f(5 + \textcircled{-1})$ ricostruisce numericamente i coefficienti nello sviluppo di Taylor per la funzione $f(x)$ nel punto $x = 5$ e con $h = \textcircled{-1}$. Per gli esempi più complessi ed una descrizione più dettagliata invitiamo il lettore interessato a consultare il lavoro [24].

La nostra seconda applicazione pratica riguarda un problema di ottimizzazione non-lineare e la soluzione di esso con l'uso di nuovi numerali nel modo proposto da De Leone e De Cosmis in [2]. Questa applicazione è interessante perché in essa vengono usati sia numeri infiniti che infinitesimi.

Esempio 12. Trovare nel modo numerico⁸ la soluzione del seguente problema di ottimizzazione quadratica

$$\min_x \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2$$

con un vincolo lineare

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Soluzione. Uno dei metodi tradizionali per risolvere questo problema è quello di scegliere un coefficiente di penalità P ottenendo così un problema non-vincolato

$$\min_x \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 + \frac{P}{2}(1 - x_1 - x_2)^2.$$

La difficoltà inerente a questo metodo sta nel fatto che risolvendo il problema non-vincolato nel modo numerico non è chiaro come bisogna scegliere il valore del parametro P . Per esempio, scegliendo $P = 20$ otteniamo le condizioni di ottimalità del primo ordine

⁸ In questo semplice esempio la soluzione può essere trovata facilmente in modo analitico. Chiaramente, quando sorge la necessità di risolvere un problema pratico, un metodo numerico generale deve essere applicabile a tutti i possibili problemi della forma prestabilita e le considerazioni analitiche con carta e penna non possono essere usate.

$$\begin{cases} x_1 - 20(1 - x_1 - x_2) = 0, \\ \frac{1}{3}x_2 - 20(1 - x_1 - x_2) = 0. \end{cases}$$

Risolviendo questo sistema di equazioni lineari otteniamo il punto stazionario del problema non-vincolato

$$x_1^*(20) = \frac{20}{81}, \quad x_2^*(20) = \frac{60}{81}$$

e non è chiaro come ottenere da questa soluzione la soluzione del problema vincolato originario. Spesso in pratica il problema non-vincolato viene risolto più volte per diversi valori di P cercando di capire dove converge la successione delle soluzioni dei problemi non-vincolati per i valori crescenti di P e cercando di ottenere in questo modo un'approssimazione della soluzione del problema vincolato.

Vediamo ora che cosa succede quando si sceglie $P = \textcircled{1}$. Allora la soluzione del sistema lineare corrispondente alle condizioni di ottimalità del primo ordine è

$$x_1^*(\textcircled{1}) = \frac{1\textcircled{1}}{1+4\textcircled{1}}, \quad x_2^*(\textcircled{1}) = \frac{3\textcircled{1}}{1+4\textcircled{1}}.$$

Eseguendo la divisione in entrambi i risultati possiamo vedere che essi consistono di una parte finita e diverse parti infinitesime

$$x_1^*(\textcircled{1}) = \frac{1}{4} - \textcircled{1}^{-1} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64} \textcircled{1}^{-1} + \dots \right), \quad x_2^*(\textcircled{1}) = \frac{3}{4} - \textcircled{1}^{-1} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64} \textcircled{1}^{-1} + \dots \right).$$

Come dimostrano gli autori di [2], le parti finite di $x_1^*(\textcircled{1})$ e $x_2^*(\textcircled{1})$ ci danno esattamente la soluzione del problema vincolato iniziale, cioè $x_1^* = \frac{1}{4}$, $x_2^* = \frac{3}{4}$. Quindi, l'uso di $\textcircled{1}$ come il coefficiente di penalità ci permette di evitare la soluzione di una successione di problemi non-vincolati e in più ci consegna la soluzione esatta invece di quella approssimata che si ottiene con i metodi tradizionali.

7. Una breve conclusione

Gli interessati ad approfondire la conoscenza della nuova metodologia possono scegliere due strade: leggere il libro divulgativo [15] (dal 2013 accessibile anche in formato elettronico, per esempio, dal sito Amazon.it) oppure studiare gli articoli più tecnici elencati nella bibliografia. Come si può notare, la nuova metodologia è già stata applicata con successo in diverse aree di matematica, informatica e fisica: teoria degli insiemi, analisi matematica, frattali, macchine di Turing, automi cellulari, ottimizzazione, soluzione numerica delle equazioni differenziali ordinarie, geometria iperbolica, percolazione, ecc. Molti di questi lavori sono scaricabili dal sito [36].

Bibliografia

1. L. D'Alotto. Cellular automata using infinite computations. *Applied Mathematics and Computation*, 218(16):8077–8082, 2012.
2. S. De Cosmis and R. De Leone. The use of grossone in mathematical programming and operations research. *Applied Mathematics and Computation*, 218(16):8029–8038, 2012.
3. P. Gordon, Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia, *Science*, 306 (15):496-499, 2004.

4. D.I. Iudin, Ya.D. Sergeyev, and M. Hayakawa. Interpretation of percolation in terms of infinity computations. *Applied Mathematics and Computation*, 218(16):8099–8111, 2012.
5. D.I. Iudin, Ya.D. Sergeyev, and M. Hayakawa. Infinity computations in cellular automaton forest-fire model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 20(3): 861-870, 2015.
6. V. Kanovei and V. Lyubetsky. Grossone approach to Hutton and Euler transforms. *Applied Mathematics and Computation*, 255:36–43, 2015.
7. G. Lolli, *Nascita di un'idea matematica*, Edizioni della Scuola Normale Superiore, Pisa, 2013.
8. G. Lolli. Infinitesimals and infinites in the history of mathematics: A brief survey. *Applied Mathematics and Computation*, 218(16):7979–7988, 2012.
9. G. Lolli. Metamathematical investigations on the theory of grossone. *Applied Mathematics and Computation*, 255:3–14, 2015.
10. M. Margenstern. Using grossone to count the number of elements of infinite sets and the connection with bijections. *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 3(3):196–204, 2011.
11. M. Margenstern. An application of grossone to the study of a family of tilings of the hyperbolic plane. *Applied Mathematics and Computation*, 218(16):8005–8018, 2012.
12. M. Margenstern. Fibonacci words, hyperbolic tilings and grossone. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 21(1–3):3–11, 2015.
13. F. Montagna, G. Simi, and A. Sorbi. Taking the Pirahã seriously. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 21(1–3):52–69, 2015.
14. P. Pica, C. Lemer, V. Izard, S. Dehaene. Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group, *Science*, 306 (15):499-503, 2004.
15. Ya.D. Sergeyev, *Arithmetic of Infinity*, Edizioni Orizzonti Meridionali, CS, 2003, the 2d electronic edition, 2013.
16. Ya.D. Sergeyev. Blinking fractals and their quantitative analysis using infinite and infinitesimal numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 33(1):50–75, 2007.
17. Ya.D. Sergeyev. A new applied approach for executing computations with infinite and infinitesimal quantities. *Informatica*, 19(4):567–596, 2008.
18. Ya.D. Sergeyev. Evaluating the exact infinitesimal values of area of Sierpinski's carpet and volume of Menger's sponge. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(5):3042–3046, 2009.
19. Ya.D. Sergeyev. Numerical computations and mathematical modelling with infinite and infinitesimal numbers. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 29:177–195, 2009.
20. Ya.D. Sergeyev. Numerical point of view on Calculus for functions assuming finite, infinite, and infinitesimal values over finite, infinite, and infinitesimal domains. *Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications*, 71(12):e1688–e1707, 2009.
21. Ya.D. Sergeyev. Computer system for storing infinite, infinitesimal, and finite quantities and executing arithmetical operations with them. EU patent 1728149, issued 2009; USA patent 7,860,914, issued 2010; RF Patent 2395111, issued 20.07.2010.
22. Ya.D. Sergeyev. Counting systems and the First Hilbert problem. *Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications*, 72(3-4):1701–1708, 2010.

23. Ya.D. Sergeyev. Lagrange Lecture: Methodology of numerical computations with infinities and infinitesimals. *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino*, 68(2):95–113, 2010.
24. Ya.D. Sergeyev. Higher order numerical differentiation on the Infinity Computer. *Optimization Letters*, 5(4):575–585, 2011.
25. Ya.D. Sergeyev. On accuracy of mathematical languages used to deal with the Riemann zeta function and the Dirichlet eta function. *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 3(2):129–148, 2011.
26. Ya.D. Sergeyev. Using blinking fractals for mathematical modelling of processes of growth in biological systems. *Informatica*, 22(4):559–576, 2011.
27. Ya.D. Sergeyev (2013) Solving ordinary differential equations by working with infinitesimals numerically on the Infinity Computer, *Applied Mathematics and Computation*, 219(22), 10668–10681.
28. Ya.D. Sergeyev (2013) Numerical computations with infinite and infinitesimal numbers: Theory and applications, in “Dynamics of Information Systems: Algorithmic Approaches” edited by Sorokin, A., Pardalos, P.M., Springer, New York, pp. 1-66.
29. Ya.D. Sergeyev and A. Garro. Observability of Turing machines: A refinement of the theory of computation. *Informatica*, 21(3):425–454, 2010.
30. Ya.D. Sergeyev and A. Garro. Single-tape and Multi-tape Turing Machines through the lens of the Grossone methodology. *The Journal of Supercomputing*, 65(2):645–663, 2013.
31. Ya.D. Sergeyev, A. Garro. The Grossone methodology perspective on Turing machines, in "Automata, Universality, Computation", A. Adamatzky (ed.), Springer Series "Emergence, Complexity and Computation", Vol. 12: 139-169, 2015.
32. M.C. Vita, S. De Bartolo, C. Fallico, and M. Veltri. Usage of infinitesimals in the Menger's Sponge model of porosity. *Applied Mathematics and Computation*, 218(16):8187–8196, 2012.
33. P. Zellini. Breve storia dell'infinito, Adelphi, Milano, 2006.
34. A.A. Zhigljavsky. Computing sums of conditionally convergent and divergent series using the concept of grossone. *Applied Mathematics and Computation*, 218(16):8064–8076, 2012.
35. A. Zilinskas. On strong homogeneity of two global optimization algorithms based on statistical models of multimodal objective functions. *Applied Mathematics and Computation*, 218(16):8131–8136, 2012.
36. <http://www.theinfinitycomputer.com>